UEBER DIE REDUCIBILITÄT DER REELLEN GRUPPEN LINEARER HOMOGENER SUBSTITUTIONEN*

VON

ALFRED LOEWY

Eine Gruppe G linearer homogener Substitutionen in n Variablen mit ausschliesslich *reellen* Coefficienten nenne ich nach §4 meiner in diesen Transactions, vol. 4, pp. 44–64, erschienenen Arbeit, "Ueber die Reducibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen," die ich im Folgenden mit I citire, *reell irreducibel*, wenn es *keine* Matrix P von nicht verschwindender Determinante giebt, dass die Matrices sämtlicher Substitutionen der Gruppe $\overline{G} = PGP^{-1}$ von der Form:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
a_{m+11} & a_{m+12} & \cdots & a_{m+1m} & a_{m+1\,m+1} & a_{m+1\,m+2} & \cdots & a_{m+1n} \\
a_{m+21} & a_{m+22} & \cdots & a_{m+2m} & a_{m+2\,m+1} & a_{m+2\,m+2} & \cdots & a_{m+2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & a_{n\,m+1} & a_{n\,m+2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right.$$

werden und ausschliesslich nur *reelle* Coefficienten haben. In dem vorliegenden Aufsatze beweise ich folgendes Theorem: *Ist die Gruppe G eine reell irreducible Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen in n Variablen, so ist sie entweder auch eine schlechtweg irreducible Gruppe oder es existirt eine Matrix R von nicht verschwindender Determinante, dass die Matrices sämtlicher Substitutionen der ähnlichen Gruppe RGR^{-1} von der besonderen Form:*

* Presented to the Society February 28, 1903. Received for publication January 8, 1903.

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & c^0_{11} & c^0_{12} & \cdots & c^0_{1m} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c^0_{21} & c^0_{22} & \cdots & c^0_{2m} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c^0_{m1} & c^0_{m2} & \cdots & c^0_{mm}
\end{array}
$$

werden, wobei c^0_{ik} *und* c_{ik} *conjugirt imaginär sind und natürlich nicht alle* c_{ik} *reell sein dürfen,* $(i, k = 1, 2, \cdots, m)$, $n = 2m$ *ist, ferner die zwei Teilgruppen schlechtweg irreducible Gruppen bilden.* Mit anderen Worten: *Eine nicht absolut irreducible, sondern nur reell irreducible Gruppe einer endlichen oder unendlichen Anzahl reeller linearer homogener Substitutionen ist einer zerlegbaren Gruppe:*

$$
\begin{matrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G^0_{11} \end{matrix}
$$

ähnlich, wobei G_{11} *und* G^0_{11} *zwei absolut irreducible Gruppen in einer gleichen Anzahl von Variablen mit nicht ausschliesslich reellen Substitutionscoefficienten sind, die aus einander hervorgehen, indem man die Coefficienten in jeder Matrix der Substitutionen der einen Gruppe durch ihre conjugirt imaginären Werte ersetzt.*

Der angegebene Satz erledigt die Auffindung aller reell irreducible Gruppen linearer homogener Substitutionen vollständig, vorausgesetzt dass man alle schlechtweg irreduciblen kennt, ferner giebt das Theorem auch über die irreduciblen Bestandteile irgend einer reellen Gruppe linearer homogener Substitutionen Aufschluss.

§ 1.

Wenden wir uns zum Beweise des angegebenen Satzes! Es sei G eine reell irreducible Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen in n Variablen, die aber nicht absolut irreducibel ist; dann giebt es eine Matrix P von nicht verschwindender Determinante, dass die ähnliche Gruppe $\overline{G} = PGP^{-1}$ von der Form

$$
(1) \qquad \begin{matrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}
$$

wird; dabei bedeutet G_{11} einen Inbegriff von Matrices mit m Zeilen und m Colonnen $(m < n)$, G_{21} einen Inbegriff von Matrices mit $n - m$ Zeilen und m Colonnen, G_{22} einen Inbegriff von Matrices mit $n - m$ Zeilen und $n - m$ Colonnen;

G_{11}, G_{21} und G_{22} haben nicht lauter reelle Coefficienten. Ich benutze hierbei eine wohl unmittelbar klare symbolische Bezeichnung, wie ich sie auch I, S. 46 anwandte. Man kann, was offenbar für die Gruppe G keine weitere Voraussetzung einführt und was wir daher auch annehmen, die Matrix P so gewählt denken, dass die Gruppe G_{11} eine schlechtweg irreducible Gruppe ist. Anders ausgedrückt: G_{11} soll einer der absolut irreduciblen Bestandteile von G sein (I, S. 46). Da G eine reell irreducible Gruppe sein soll, so kann G_{11} keiner Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen ähnlich sein. Unter P^0 sei diejenige Matrix verstanden, welche aus P hervorgeht, indem man jeden Coefficienten von P durch seinen conjugirt imaginären Wert ersetzt. Ebenso seien G^0, $\overline{G}^0$, G^0_{11}, G^0_{21}, G^0_{22} diejenigen Gesamtheiten von Matrices, die sich aus denjenigen von G, $\overline{G}$, G_{11}, G_{21}, G_{22} ergeben, wenn man in jenen sämtliche Terme durch ihre conjugirt imaginären Werte ersetzt. Durch Vertauschung jeder Grösse mit ihrer conjugirt imaginären geht die symbolische Gleichung:

$$\overline{G} = PGP^{-1} \tag{2}$$

in

$$\overline{G}^0 = P^0 G (P^0)^{-1} \tag{3}$$

über. Dabei habe ich bald davon Gebrauch gemacht, dass die Matrices der Gruppe G, da G eine Gruppe mit ausschliesslich reellen Substitutionen ist, identisch mit den Matrices sind, die aus ihnen durch Ersetzen jeden Termes durch den conjugirt imaginären Wert erhalten werden; also $G^0 = G$. Offenbar ist ferner für jede Matrix P: $(P^0)^{-1} = (P^{-1})^0$. Infolge der Form (1), die $\overline{G} = PGP^{-1}$ hat, folgt, dass die Gruppe $\overline{G}^0 = P^0 G (P^0)^{-1}$ die Form

$$\begin{matrix} G^0_{11} & 0 \\ G^0_{21} & G^0_{22} \end{matrix} \tag{4}$$

hat. Wir bilden uns jetzt die zerlegbare Gruppe H, die man erhält, indem man eine jede Matrix von G durch die gleiche Matrix zu einer Gruppe der doppelten Variablenzahl erweitert und welche die Gestalt

$$\begin{matrix} G & 0 \\ 0 & G \end{matrix} \tag{5}$$

hat. Ferner construiren wir uns eine Matrix:

$$\begin{matrix} P & 0 \\ 0 & P^0 \end{matrix}$$

von $2n$ Variablen, die wir mit Q bezeichnen.

Die Gruppe QHQ^{-1}, die wir mit $\overline{H}$ bezeichnen, wird dann von der Form:

$$\begin{matrix} PGP^{-1} & 0 \\ 0 & P^0 G (P^0)^{-1}. \end{matrix}$$

Diese Gruppe $\overline{H}$ kann wegen (1) und (4) auch

$$\begin{matrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{11}^0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{21}^0 & G_{22}^0 \end{matrix} \tag{6}$$

geschrieben werden. Wir führen jetzt zwei Paare von je $2n$ Variablen y_1, $y_2, \cdots, y_n, z_1, z_2, \cdots, z_n$ und $y_1', y_2', \cdots, y_n', z_1', z_2', \cdots, z_n'$ ein und lassen dieselben sich nach der Gruppe $\overline{H}$ transformiren. Die Substitutionen von $\overline{H}$ werden dann wegen der Form (6) von $\overline{H}$, da sich G_{11} auf m Variablen ($m < n$) bezieht, das Aussehen haben:

$$\begin{aligned}
y_1 &= c_{11} y_1' + c_{12} y_2' + \cdots + c_{1m} y_m' \\
y_2 &= c_{21} y_1' + c_{22} y_2' + \cdots + c_{2m} y_m' \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_m &= c_{m1} y_1' + c_{m2} y_2' + \cdots + c_{mm} y_m' \\
y_{m+1} &= c_{m+11} y_1' + c_{m+12} y_2' + \cdots + c_{m+1m} y_m' + c_{m+1\,m+1} y_{m+1}' + \cdots + c_{m+1n} y_n' \\
y_{m+2} &= c_{m+21} y_1' + c_{m+22} y_2' + \cdots + c_{m+2m} y_m' + c_{m+2\,m+1} y_{m+1}' + \cdots + c_{m+2n} y_n' \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_n &= c_{n1} y_1' + c_{n2} y_2' + \cdots + c_{nm} y_m' + c_{nm+1} y_{m+1}' + \cdots + c_{nn} y_n' \\
z_1 &= c_{11}^0 z_1' + c_{12}^0 z_2' + \cdots + c_{1m}^0 z_m' \\
z_2 &= c_{21}^0 z_1' + c_{22}^0 z_2' + \cdots + c_{2m}^0 z_m' \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
z_m &= c_{m1}^0 z_1' + c_{m2}^0 z_2' + \cdots + c_{mm}^0 z_m' \\
z_{m+1} &= c_{m+11}^0 z_1' + c_{m+12}^0 z_2' + \cdots + c_{m+1m}^0 z_m' + c_{m+1\,m+1}^0 z_{m+1}' + \cdots + c_{m+1n}^0 z_n' \\
z_{m+2} &= c_{m+21}^0 z_1' + c_{m+22}^0 z_2' + \cdots + c_{m+2m}^0 z_m' + c_{m+2\,m+1}^0 z_{m+1}' + \cdots + c_{m+2n}^0 z_n' \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
z_n &= c_{n1}^0 z_1' + c_{n2}^0 z_2' + \cdots + c_{nm}^0 z_m' + c_{nm+1}^0 z_{m+1}' + \cdots + c_{nn}^0 z_n'.
\end{aligned} \tag{7}$$

Durch Einführung von zwei Paaren von je $2n$ neuen Variablen durch die Relationen:

$$\begin{aligned}
y_k &= u_k + iv_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \qquad i = \sqrt{-1}, \\
z_k &= u_k - iv_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \qquad i = \sqrt{-1},
\end{aligned} \tag{8}$$

und cogredient

$$(8_1)\qquad \begin{aligned} y'_k &= u'_k + iv'_k, & k &= 1, 2, \cdots, n, & i &= \sqrt{-1}, \\ z'_k &= u'_k - iv'_k, & k &= 1, 2, \cdots, n, & i &= \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

transformiren wir $\overline{H}$ in eine ähnliche Gruppe, die wir mit $\overline{\overline{H}}$ bezeichnen. Die Substitutionen von $\overline{\overline{H}}$ haben die Form:

$$(9)\qquad \begin{aligned} u_{k_1} &= \sum_{s=1}^{s=m} \frac{c_{k_1 s} + c^0_{k_1 s}}{2} u'_s + i \sum_{s=1}^{s=m} \frac{c_{k_1 s} - c^0_{k_1 s}}{2} v'_s & &(k_1 = 1, 2, \cdots, m), \\ v_{k_1} &= \sum_{s=1}^{s=m} \frac{c_{k_1 s} - c^0_{k_1 s}}{2i} u'_s + \sum_{s=1}^{s=m} \frac{c_{k_1 s} + c^0_{k_1 s}}{2} v'_s & &(k_1 = 1, 2, \cdots, m), \\ u_{k_2} &= \sum_{s=1}^{s=n} \frac{c_{k_2 s} + c^0_{k_2 s}}{2} u'_s + i \sum_{s=1}^{s=n} \frac{c_{k_2 s} - c^0_{k_2 s}}{2} v'_s & &(k_2 = m+1, m+2, \cdots, n), \\ v_{k_2} &= \sum_{s=1}^{s=n} \frac{c_{k_2 s} - c^0_{k_2 s}}{2i} u'_s + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{c_{k_2 s} + c^0_{k_2 s}}{2} v'_s & &(k_2 = m+1, m+2, \cdots, n). \end{aligned}$$

Wie aus (9) hervorgeht, hat die Gruppe $\overline{\overline{H}}$ lauter reelle Coefficienten und ist von der Form

$$(10)\qquad \begin{matrix} \overline{\overline{H}}_{11} & 0 \\ \overline{\overline{H}}_{21} & \overline{\overline{H}}_{22} \end{matrix};$$

hierbei bedeutet $\overline{\overline{H}}_{11}$ eine Gesamtheit von Matrices mit $2m$ Zeilen und $2m$ Colonnen, die den Transformationen der $2m$ Variablen u_{k_1}, v_{k_1} in u'_{k_1}, v'_{k_1} $(k_1 = 1, 2, \cdots, m)$ entsprechen. Die Gruppe $\overline{\overline{H}}_{11}$ ist, wie aus der Einführung der neuen Variablen durch die Gleichungen (8) und (8_1) in (7) folgt, wenn man (6) berücksichtigt, ähnlich zu der zerlegbaren Gruppe:

$$(11)\qquad \begin{matrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G^0_{11} \end{matrix}.$$

Wir haben nun in (5) für die reelle Gruppe H, da G eine reell irreducible Gruppe ist, eine Zerlegung in ihre reell irreduciblen Bestandteile; dieselben sind die zweifach zu zählende Gruppe G. In I, § 4, bewiesen wir einen Satz, der für reelle Gruppen folgendermassen lautet: Wie auch immer eine Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen von endlicher oder unendlicher Ordnung unter Hervorhebung ihrer reell irreduciblen Bestandteile in eine ähnliche reelle Gruppe transformirt wird, so kann man die reell irreduciblen Bestandteile, die sich bei irgend einer solchen Darstellung ergeben, den reell irreduciblen Be-

standteilen, die sich bei irgend einer anderen solchen Darstellung ergeben, eineindeutig zuordnen, dass zwei zugeordnete reell irreducible Teilgruppen stets gleichviele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind. Aus diesem Theorem folgt, da H und $\overline{\overline{H}}$ ähnliche reelle Gruppen sind, dass auch in (10) ebenso wie in (5) nicht mehr als zwei reell irreducible Bestandteile auftreten dürfen, von denen ein jeder mit G ähnlich sein muss. Daher ist $\overline{\overline{H}}_{11}$ notwendig reell irreducibel und mit G ähnlich. Die Gruppe $\overline{\overline{H}}_{11}$ ist aber zu der durch (11) dargestellten zerlegbaren Gruppe ähnlich; mithin ist auch G zu dieser zerlegbaren Gruppe:

$$\begin{matrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{11}^{0} \end{matrix}$$

ähnlich. Erinnert man sich noch, dass G_{11}, wie wir voraussetzen durften, eine schlechtweg irreducible Gruppe war, so hat man den im Anfang des Aufsatzes ausgesprochenen Satz.

§ 2.

Aus dem bewiesenen Satz folgt als Corollar: *Jede reell irreducible Gruppe einer endlichen oder unendlichen Anzahl reeller linearer homogener Substitutionen mit einer ungeraden Variablenzahl ist stets absolut irreducibel.*

Die Aufsuchung aller absolut irreducibler Gruppen linearer homogener Substitutionen erledigt mithin für eine ungerade Variablenzahl auch das Problem der Aufstellung aller reell irreducibler Gruppen reeller linearer homogener Substitutionen einer ungeraden Variablenzahl.

Um alle reell irreducibler Gruppen reeller linearer homogener Substitutionen in $2m$ Variablen zu finden, wobei wir ähnliche Gruppen nicht als verschieden ansehen, hat man auf folgende Art zu verfahren: Erstens sind die Repräsentanten für alle Gruppen reeller linearer homogener Substitutionen in $2m$ Variablen, die *absolut* irreducibel sind, in reeller Form aufzustellen. Zweitens sind die Repräsentanten für alle verschiedenen absolut irreducibler Gruppen G_{11} linearer homogener Substitutionen in m Variablen, die keiner Gruppe *reeller* linearer homogener Substitutionen in m Variablen ähnlich sind, zu bestimmen und jede derselben durch die Gruppe G_{11}^{0} zu der zerlegbaren Gruppe;

$$(11) \qquad \begin{matrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{11}^{0} \end{matrix}$$

in $2m$ Variablen zu erweitern und schliesslich (11) durch die Transformationen (8) und (8_1) in reelle Form überzuführen. Um die Repräsentanten der reell irreducibler Gruppen nur einfach zu erhalten sind von der Gesamtheit von Gruppen G_{11}, diejenigen, welche aus der Vertauschung von i mit $-i$ hervorgehen nur einfach zu verwerten; denn offenbar sind die zwei Gruppen:

$$\begin{matrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{11}^0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G_{11}^0 & 0 \\ 0 & G_{11} \end{matrix}$$

ähnlich.

§ 3.

Hat man irgend eine Gruppe G reeller linearer homogener Substitutionen, so kann man dieselbe stets in eine ähnliche Gruppe ebenfalls reeller linearer homogener Substitutionen transformiren, welche die Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{41} & \mathfrak{a}_{42} & \mathfrak{a}_{43} & \mathfrak{a}_{44} & & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{\lambda-11} & \mathfrak{a}_{\lambda-12} & \mathfrak{a}_{\lambda-13} & \mathfrak{a}_{\lambda-14} & \mathfrak{a}_{\lambda-15} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ \mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \mathfrak{a}_{\lambda 5} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\,\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

hat; dabei sollen, was stets zu erreichen möglich ist, die Teilgruppen $\mathfrak{a}_{ii}$ $(i = 1, 2, \cdots \lambda)$ ausnahmslos *reell irreducible* Gruppen sein. Entweder ist eine Gruppe $\mathfrak{a}_{ii}$ auch absolut irreducibel oder $\mathfrak{a}_{ii}$ ist durch eine Matrix P_i von nicht verschwindender Determinante in die ähnliche Gruppe $P_i \mathfrak{a}_{ii} P_i^{-1}$ transformirbar, die zerlegbar ist und die Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g}_{ii} & 0 \\ 0 & \mathfrak{g}_{ii}^0 \end{matrix}$$

hat, wobei $\mathfrak{g}_{ii}$ und $\mathfrak{g}_{ii}^0$ zwei absolut irreducible Gruppen bedeuten; diese beziehen sich nur auf die halbe Anzahl von Variablen, wie sie $\mathfrak{a}_{ii}$ hat, sie sind keiner Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen ähnlich und gehen auseinander durch Vertauschung aller Substitutionscoefficienten mit den conjugirt imaginären Werten hervor. Hieraus folgt: *Die absolut irreduciblen Bestandteile einer Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen, welche keiner Gruppe reeller linearer homogener Substitutionen ähnlich sind, lassen sich in Paare ordnen; zwei derartig zugeordnete Teilgruppen gehen auseinander hervor, indem man sämtliche Substitutionscoefficienten durch die conjugirt imaginären Werte ersetzt.*

Eine jede Gruppe einer endlichen oder unendlichen Anzahl *reeller* linearer homogener Substitutionen einer *ungeraden* Variablenzahl hat also eine in *reeller* Form darstellbare Teilgruppe, die absolut irreducibel ist. Dieselbe kann übrigens auch unter Umständen bei einer endlichen Gruppe die mehrfach, bei einer unendlichen Gruppe die unendlich viele Male wiederholte identische Substitution sein.

FREIBURG I. B.,
December, 1902.